LISTA DE EXERCÍCIOS | COLÉGIO NAVAL (CN)

1) (CN 1975) Dois números inteiros positivos tem soma 96 e o máximo divisor comum igual a 12. Dar o maior dos dois números sabendo que o produto deles deve ser o *maior possível*.
2) (CN 1975) Um composto A leva 20% de álcool e 80% de gasolina e um composto B leva 30% de álcool e 70% de gasolina. Quantos litros devemos tomar do composto A para, complementando com o composto B, preparar 5 litros de um composto com 22% de álcool e 78% de gasolina ?
3) (CN 1975) Cinco círculos de 1 cm de raio são interiores ao quadrado. Um deles tem o mesmo centro que o quadrado e cada um dos demais tangencia o primeiro círculo e dois lados consecutivos do quadrado. Achar a área do quadrado.
   a) 18 cm²
   b) $12+4\sqrt{2}$ cm²
   c) $12+8\sqrt{2}$ cm²
   d) 12,5 cm²
   e) $10+12\sqrt{6}$ cm²

4) (CN 1975) Calcular a soma dos termos da maior fração própria irredutível, para que o produto de seus termos seja 60.

5) (CN 1975) Calcular a soma dos valores de m e n de modo que as equações $(2n+m)x^2-4mx+4=0$ e $(6n+m)x^2+3(n-1)x-2=0$ tenham as mesmas raízes.

6) (CN 1975) Em um concurso foi concedido um tempo T, para a realização da prova de Matemática. Um candidato gastou $\frac{1}{3}$ deste tempo para resolver a parte de aritmética e 25% do tempo restante para resolver a parte de álgebra. Como ele só gastou $\frac{2}{3}$ do tempo de que ainda dispunha para resolver a parte de geometria, entregou a prova faltando 35 minutos para o término da mesma. Qual foi o tempo T concedido ?

7) (CN 1975) Os pontos A, B, C, D e E são cinco vértices consecutivos de um decágono regular. Achar o ângulo $\angle BAE$.

8) (CN 1975) O lado de um triângulo equilátero é igual ao lado de um hexágono regular e ambos medem $6\sqrt{3}$ cm. Se colocarmos, sobre um plano, o triângulo ao lado do hexágono, de maneira que dois lados fiquem em coincidência, qual será a distância entre os centros das duas figuras.
9) (CN 1975) Uma circunferência de 4 cm de raio está dentro de um ângulo de 120° tangenciando os lados do ângulo nos pontos A e B. Achar a área do retângulo inscrito na circunferência que tem, para um dos lados a corda AB.
10) (CN 1975) Resolver a inequação $\dfrac{(x-1)^3\cdot(x^2-4x+4)}{-x^2+x-1}\geq 0$
11) (CN 1976) Um capital é empregado à taxa de 8% ao ano. No fim de quanto tempo os juros simples produzidos ficam iguais a $\frac{3}{5}$ do capital ?

12) (CN 1976) Marcar a frase certa:

a) O ortocentro de qualquer triângulo é o ponto de interseção de suas medianas.
b) O baricentro de qualquer triângulo é equidistante de seus vértices.
c) Os ângulos opostos de qualquer quadrilátero inscritível são complementares.
d) As diagonais de todo retângulo são iguais e perpendiculares.
e) O incentro de qualquer triângulo é equidistante dos três lados do triângulo.

13) (CN 1976) A razão entre o raio do círculo inscrito para o raio do círculo circunscrito ao mesmo triângulo equilátero é:

14) (CN 1976) Sobe os lados de um hexágono regular de 4 cm de lado, e exteriormente a ele, constroem-se quadrados, de modo que cada quadrado tenha um lado em comum com o hexágono. Calcular a área do dodecágono cujos vértices são os vértices dos quadrados que não são vértices do hexágono:

15) (CN 1976) Dar a soma das raízes da equação $\sqrt{2x-4}-3\sqrt[4]{2x-4}=-2$

16) (CN 1976) Um recipiente é dotado de duas torneiras. A primeira torneira esvazia-o em um tempo inferior a outra de 30 minutos. Sabendo que as duas torneiras juntas esvaziam o recipiente em 20 minutos , determine em quanto tempo a primeira torneira esvazia 60% do recipiente.

17) (CN 1976) O número 38 é dividido em duas parcelas. A maior parcela dividida pela menor dá quociente 4 e resto 3. Achar o produto dessas duas partes.

18) (CN 1976) Calcular m , no número $A=2^{m-1}\cdot 3^2\cdot 5^m$, de modo que o M.D.C entre o número A e o número 9000 seja 45.

19) (CN 1976) Dois inteiros positivos, primos entre si x e y, satisfazem a equação $y^2-6xy-7x^2=0$. Achar a soma $x+y$.

20) (CN 1976) O valor mínimo do trinômio $y=2x^2+bx+p$ ocorre para $x=3$. Sabendo que um dos valores de x que anulam esse trinômio é o dobro do outro, dar o valor de p.

21) (CN 1977) O valor de $\sqrt[3]{16\sqrt{8}}\cdot\sqrt[6]{0,125}$ é:

22) (CN 1977) Em uma prova realizada em uma escola, foram reprovados 25% dos alunos que a fizeram. Na 2ª chamada, para os 8 alunos que faltaram, foram reprovados 2 alunos. A porcentagem de aprovação da turma toda foi de:

23) (CN 1977) Um terreno regular tem o comprimento igual a $\frac{3}{2}$ da largura e o seu perímetro é de 100 m. O terreno foi vendido à razão de R$ 3000 o metro quadrado e ficou combinado que a metade do preço seria paga na hora e a outra metade seria paga 18 meses depois com um juros de 8% ao ano. O custo total do terreno ficou em:

24) (CN 1977) Assinale a frase falsa:

a) Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são iguais ou suplementares
b) O triângulo retângulo de catetos 6 e 8 tem altura relativa à hipotenusa igual a 4,8.
c) Se os ângulos opostos de um quadrilátero são iguais, o quadrilátero é um paralelogramo.
d) A diferença entre o ângulo interno e o ângulo central de um pentágono regular é de 60°.
e) O hexágono regular tem 9 diagonais.

25) (CN 1980) PQ é a corda comum de duas circunferências secantes de centros em A e B. A corda PQ, igual a $4\sqrt{3}$, determina, nas circunferências, arcos de 60° e 120°. A área do quadrilátero convexo APBQ é :

26) (CN 1980) A razão entre as áreas de dois círculos tangentes exteriores dá 9 e a soma dos comprimentos de suas circunferências 8π cm. Uma tangente comum aos dois círculos corta a reta que contém os dois centros em um ponto exterior P que está a que distância do centro do círculo maior?

27) (CN 1980) Na base AB de um triângulo isósceles de vértice C, toma-se o ponto P. A base mede 3 cm e o perímetro 17 cm. Do ponto P tomam-se paralelas aos lados iguais, obtendo um paralelogramo que terá perímetro:

28) (CN 1980) A soma das soluções da equação $\sqrt{2x+1}-4\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}=0$ dá um número:

a) nulo
b) par entre 42 e 310
c) ímpar maior que 160
d) irracional
e) racional

29) (CN 1980) Fatorando a expressão $\dfrac{x\left(x^4-5x^2+4\right)-2\left(x^4-5x^2+4\right)}{\left(x^3-6x^2+12x-8\right).\left(x^2-1\right)}$ obtemos:

30) (CN 1980) A soma de dois números inteiros positivos, em que o maior é menor que o dobro do menor, dá 136 e o máximo divisor comum entre eles é 17. A diferença entre esses números é:

31) (CN 1980) Em um problema de regra de três composta, entre as variáveis X, Y e Z, sabe-se que, quando o valor de Y aumenta, o de X também aumenta; mas, quando Z aumenta, o valor de X diminui , e que para X = 1 e Y = 2, o valor de Z = 4. O valor de X, para Y = 18 e Z = 3 é :

32) (CN 1980) Se o trinômio $y=mx\left(x-1\right)-3x^2+6$ admite -2 como uma de suas raízes, podemos afirmar que o trinômio :

a) tem mínimo no ponto $x=-0,5$
b) pode ter valor numérico 6,1
c) pode ter valor numérico 10
d) tem máximo no ponto $x=0,5$
e) tem máximo no ponto $x=0,25$

33) (CN 1980) Para se decompor a fração $\dfrac{3x-4}{x^2-5x+6}$ na soma de duas outras frações com denominadores do 1º grau, a soma das constantes que aparecerão nos numeradores é:

34) (CN 1980) O triângulo do segundo grau $y=(K+1)x^2+(K+5)x+(K^2-16)$ apresenta máximo e tem uma raiz nula. A outra raiz é:

35) (CN 1980) Um paralelogramo tem 24 cm de perímetro, 24 cm² de área e uma altura é o dobro da outra . A soma dessas alturas é:

36) (CN 1980) Em uma circunferência de 6 cm de raio estão os arcos AB de 60° e BC de 120°. A altura do triângulo ABC relativamente ao maior lado mede:

37) (CN 1980) O triângulo ABC tem 60 cm² de área . Dividindo-se o lado BC em 3 partes proporcionais aos números 2, 3 e 7 e tomando-se esses segmentos para bases de 3 triângulos que têm para vértice o ponto A, a área do maior dos três triângulos é:

38) (CN 1980) O triângulo ABC é retângulo em A. A hipotenusa BC mede 6 cm e o ângulo em C é de 30°. Tomando-se sobre AB o ponto M e sobre BC o ponto P, de maneira que PM seja perpendicular a BC e as áreas dos triângulos CAM e PMB sejam iguais, a distância BM será:

39) (CN 1980) Um triângulo retângulo tem os catetos com 2 cm e 6 cm. A área do círculo que tem o centro sobre a hipotenusa e tangencia os dois catetos é de :

40) Se $3^a=4, 4^b=5, 5^c=6, 6^d=7, 7^e=8, 8^f=9$, determine o produto $abcdef$.

41) Os números da forma $4^{k^2+50}+4^{k^2+51}+4^{k^2+52}+4^{k^2+53}$ são sempre múltiplos de:
a) 17
b) 19
c) 23
d) 29
e) 31

42) Supondo $x=7^{2014}$, o número de inteiros compreendidos entre $\sqrt{x^2+2x+4}$ e $\sqrt{4x^2+2x+1}$ é:
a) $7^{2014}-2$
b) $7^{2014}-1$
c) 7^{2014}
d) $7^{2014}+1$
e) $7^{2014}+2$

43) Seja $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$ o n-ésimo número triangular. Encontre o valor de

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\cdots+\frac{1}{t_{2014}}$$

44) O número de inteiros n para os quais $n^4-4n^3+14n^2-20n+10$ é um quadrado perfeito é igual a:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) mais de 3

45) Determinar um número $\overline{abc}$ de três dígitos, tal que $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ seja um quadrado perfeito.

46) Define-se fatorial de um número n como sendo o produto dos n primeiros naturais positivos consecutivos ($n!=n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1$. Números podem ser escritos em uma base fatorial de numeração, isto é:

$$\left(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1\right)_F = a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + \ldots + a_2 \cdot 2! + a_1$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são dígitos. Por exemplo, o número 251 pode ser escrito como $2 \cdot 5! + 0 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 = (20121)_F$. Classifique em V ou F:

I. O número 999 na base fatorial é escrito como $(121211)_F$

II. O número $(42001)_F$ na base decimal se escreve como 529.

III. O sucessor de $(54321)_F$ é o número $(100000)_F$.

1) Apenas I e II são verdadeiras
2) Apenas I e III são verdadeiras
3) Apenas II e III são verdadeiras
4) Todas as afirmativas são verdadeiras
5) Todas as afirmativas são falsas

47) Seja a um inteiro tal que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} = \frac{a}{23!}$. O resto da divisão de a por 13 é igual a:

a) 11
b) 9
c) 7
d) 5
e) 3

48) Seja r um número racional tal que $[r]$ representa sua parte inteira e $\{r\}$ representa sua parte decimal. Por exemplo, para $r = 12{,}34$, $[r] = 12$ e $\{r\} = 0{,}34$. Os valores de x, y e z que satisfazem ao sistema de equações

$$x + [y] + \{z\} = 200$$
$$\{x\} + y + [z] = 190{,}1$$
$$[x] + \{y\} + z = 178{,}8$$

são tais que $x - y + z$ é igual a:

a) 63,15
b) 63,25
c) 63,35
d) 63,45
e) 63,55

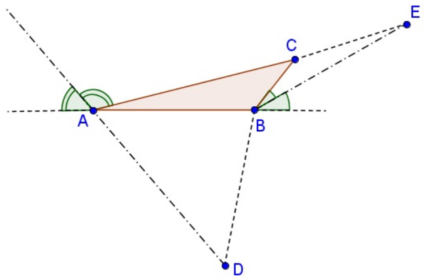
49) Determinar as soluções reais da equação $x^6 - (n+1)x^2 + \sqrt{n} = 0$.

50) Num triângulo retângulo, um dos catetos mede 11 cm e os outros dois lados são números inteiros. Encontre o perímetro do triângulo.

51) Suponha dois números a e b tais que $a^2 + b^2 + 8a - 14b + 65 = 0$. Determine o valor de $a^2 + ab + b^2$.

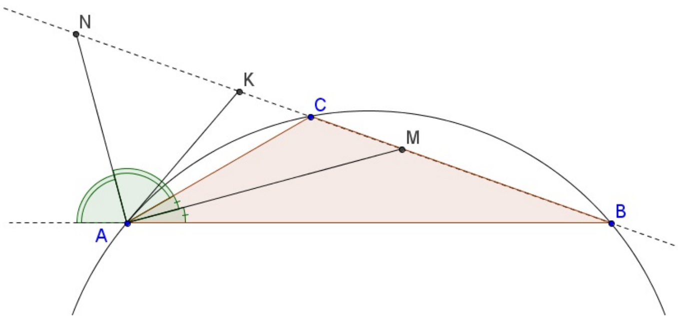
52) No triângulo ABC, AB = AC e o ângulo Â mede 80º. Seja P interior ao triângulo tal que PBC = 40º e PCB = 30º. Determinar o ângulo APC.

53) Como mostrado na figura, no ΔABC, as bissetrizes dos ângulos externos de A e B intersectam as retas-suporte do triângulo em D e E, respectivamente, de forma que $AD = AB = BE$. Determine o valor do ângulo BAC.



a) 9º
b) 10º
c) 11º
d) 12º
e) 13º

54) Do vértice A de um triângulo ABC, três segmentos são traçados: a bissetriz interna $\overline{AM}$, a bissetriz externa $\overline{AN}$ e a tangente ao círculo circunscrito ao triângulo, $\overline{AK}$ (K, M e N estão sobre a reta suporte de BC). Calcule NK sabendo-se que $MK = a$.



55) Calcule a razão entre a distância entre dois vértices diametralmente opostos e a distância entre dois lados opostos, de um hexágono regular de lado l.
56) Dados 3 pontos consecutivos A, B e C sobre uma reta r, traçam-se três semicírculos de diâmetros AB, AC e BC, do mesmo lado da reta. Determine a área do triângulo formado pelos pontos de máxima elevação dos semicírculos, sabendo que o segmento BF (com F sobre o maior semicírculo), perpendicular a reta r, mede 6 cm.

57) Calcule a medida do segmento de reta, paralelo às bases de um trapézio de bases 2 e 3, que contém o ponto de encontro das diagonais.
58) Do vértice A de um triângulo ABC, traçam-se a mediana AM e a bissetriz interna AD. O círculo que passa por A, D e M corta AB em E e AC em F. Sendo BE igual a 9 cm, o valor de FC é:
a) 4 cm
b) 4,5 cm
c) 6 cm
d) 9 cm
e) 18 cm

59) João vendeu dois carros de modelos A e B, sendo o preço de custo do primeiro 20% mais caro que o do segundo. Em cada carro teve um lucro de 20% sobre os seus respectivos preços de venda. Se o total dessa venda foi R$ 88.000,00, o preço de custo do segundo modelo era, em reais, igual a:
a) 30.000,00
b) 32.000,00

c) 34.000,00
d) 35.000,00
e) 36.000,00

60) A respeito da equação $\sqrt{x+a} = x, a \in \mathbb{R}$, é verdadeiro afirmar que:
a) possui uma raiz real, que pertence ao intervalo]0, a[.
b) possui uma só raiz real, que pertence ao intervalo [a, +∞[
c) possui duas raízes reais, cuja soma é 1.
d) possui duas raízes reais, cujo produto é um número racional;
e) possui duas raízes reais simétricas.

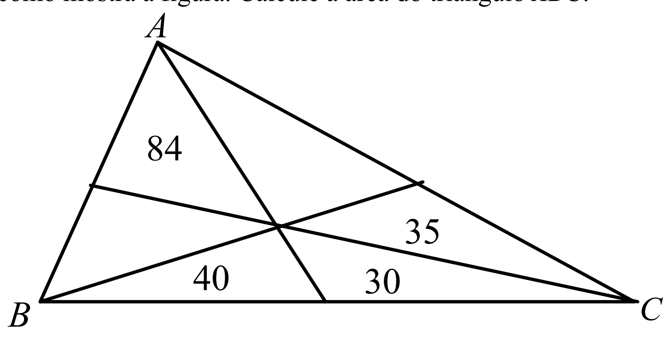
61) Duas circunferências de raios 9 m e 3 m são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em m^2, do triângulo ABC é:
a) $27\sqrt{3}$
b) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$
c) $9\sqrt{3}$
d) $27\sqrt{2}$
e) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

62) De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:
a) 63
b) 65
c) 66
d) 70
e) 77

63) Em um trapézio isósceles de bases 10 e 6, as diagonais são perpendiculares aos lados oblíquos às bases. Determine a área desse trapézio.

64) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:
a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

65) Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 30, 35 e 84, como mostra a figura. Calcule a área do triângulo ABC.



66) Encontrar o valor de $\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$ quando $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

67) Qual o dígito das unidades do produto $3^{1999}\cdot 7^{2000}\cdot 17^{2001}$?
a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

68) O resto da divisão do número $2222^{5555}+5555^{2222}$ por 7 é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

69) Seja um número $abcdef$, em que as letras representam dígitos diferentes, tal que $defabc$ é o sêxtuplo de $abcdef$. Nessas condições, determinar o valor de $a+b+c+d+e+f$.
a) 7
b) 11
c) 17
d) 21
e) 27

70) Os números da forma 12, 1122, 111222, 11112222, ..., $\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{222...2}_{n}$ são sempre:
a) Produto de dois números primos distintos
b) Soma de dois quadrados perfeitos
c) Diferença de quadrados
d) Produto de dois inteiros consecutivos
e) Múltiplos de 12

71) Quando um número de dois dígitos é dividido pelo número obtido trocando seus dígitos de posição, o quociente é igual ao resto. Determinar tal número de dois dígitos.

72) Um navio da Marinha irá transportar as tropas de Fuzileiros Navais para o Haiti. As tropas são sempre em número de 300 homens ou 450 homens. A cada viagem, o navio transportará ou 300 homens ou 450 homens de uma vez, e cada soldado só pode ir uma vez para a missão. Determinar o número mínimo de viagens do navio de forma que o contingente total de homens que já foram para o Haiti seja igual a 10000 homens.

73) Determinar a forma fatorada da expressão $\dfrac{2x^2-9x+9}{6x^2-13x+6}$.

74) Seja a uma raiz da equação $x^2-x-3=0$. Encontrar o valor de $\dfrac{a^3+1}{a^5-a^4-a^3+a^2}$.

75) Dados os inteiros $\{a,b\}, a>b$, as duas raízes α e β da equação $3x^2+3(a+b)x+4ab=0$ satisfazem a relação $\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1)$. Determinar os possíveis valores de a e b.

76) A equação $x^2+px+1=0$ possui raízes α e β, enquanto que a equação $x^2+qx+1=0$ possui raízes δ e γ. Encontrar o valor de $(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)$.

77) Quantos pares de números inteiros satisfazem a equação $x^2 - y^2 = 12$?

78) Sejam dois números reais a e b. Se $a = \frac{x+3}{4}$ e $b = \frac{2x+1}{3}$, com $b < \frac{7}{3} < 2a$, determinar o intervalo de valores de x.

79) Dado que a inequação $a^3 + b^3 - x^3 \le (a+b-x)^3 + m$ vale para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\{a,b\}$ são constantes positivas, determinar o menor valor possível de m.

80) Se α é uma raiz da equação $x^2 + x + 1 = 0$, determinar o valor da expressão $\alpha^{3m} + \alpha^{3n+1} + \alpha^{3p+2}$, onde m, n, p são números inteiros quaisquer.

81) O número $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$, para $n \in \mathbb{Z}$, é sempre divisível por:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 7

82) Em um triângulo de lados a, b e c, foi inscrita uma semicircunferência, cujo diâmetro se encontra sobre o lado c. Encontrar o raio da circunferência.

83) As diagonais de um quadrilátero convexo medem 7 e 5. Determinar a faixa de possíveis valores para o perímetro do quadrilátero.

84) Com quantos zeros termina o produto 127! = 127.126.125 ....2.1?

85) Seja um triângulo equilátero ABC e um ponto P no plano do triângulo, tal que $PA = 3$, $PB = 10$ e $PC = 7$. Podemos afirmar que:

a) o lado AB mede $3\sqrt{3}$
b) o ângulo CPA é de 120°
c) a altura do triângulo ABC é $\sqrt{210}$
d) P pertence ao interior do triângulo
e) o ângulo CPB mede 30°

86) Num quadrado ABCD de lado l, seja P um ponto interior ao quadrado de forma que o triângulo PAB seja equilátero. Seja d a distância de P ao lado CD. Se a razão $\frac{2d}{l}$ é da forma $a - \sqrt{b}$, então $a^2 + b^2$ vale:

a) 9
b) 11
c) 12
d) 13
e) 17

87) Num triângulo ABC, o ângulo interno B mede 60°. As bissetrizes internas AD e CE se interceptam em O. Se o segmento OD tem medida x, determinar a medida do segmento OE.

88) A altura de um trapézio cujas diagonais são perpendiculares é 4. Encontrar a área do trapézio, sabendo-se que uma de suas diagonais mede 5.

89) Num quadrilátero ABCD inscritível, temos que $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. Se a área do triângulo ABC é S, calcule a área do triângulo ACD.

90) Determine os valores de A, B e C, com $A > 0$ tais que

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(Ax^2+Bx+C)^2$$

91) Num triângulo retângulo isósceles ABC, M é ponto médio da hipotenusa AB. Um triângulo equilátero tem um vértice sobre AC, um vértice sobre BC e outro vértice em M. Se AB vale 24, determine o lado do triângulo equilátero.

92) Escrevendo $\sqrt{10+\sqrt{10+\sqrt{10+\cdots}}}$ sob a forma

$$\frac{a+\sqrt{b}}{c}$$

com a, b e c inteiros primos entre si dois a dois, encontre a soma $a+b+c$.

93) Encontre todos os valores reais de x que satisfazem

$$(16x^2-9)^3+(9x^2-16)^3=(25x^2-25)^3$$

94) Encontre as soluções da equação

$$x(x^3-1)-6(x^2+x+1)=0$$

95) Encontre todos os números x e y que satisfazem simultaneamente

$$(2x-y)^3+(x-2y)^3=27(x-y)^3$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x+1}}=\frac{5}{2}$$

96) Num triângulo ABC de lados $a=8, b=10$ e $c=12$, determine o valor da soma

$$\frac{cosA}{a}+\frac{cosB}{b}+\frac{cosC}{c}$$

onde A, B e C são os ângulos internos de ABC.

97) Encontre a menor altura do triângulo cujos lados são 17, 25 e 28.

98) Seja ABCD um quadrado e P um ponto interno ao quadrado tal que $PA:PB:PC=1:2:3$. Determine o ângulo APB.

99) Considere um triângulo equilátero ABC. K e L são pontos sobre BC que o dividem em três partes iguais. O ponto M divide o lado AC na razão AM:MB = 1:2. Calcule a soma dos ângulos AKM e ALM.